Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 7/1/2010 – ore 9

Esercizio 1 Posto $E_k = \{$nell'estrazione k-esima si estrae il dato errato$\}$, $k = 1, 2, 3$, risulta

$$A = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}, \quad B = E_2 \cup E_3.$$

(i) Nel caso di estrazioni con rimpiazzamento si ha

$$P(A) = P(\overline{E_1}) + P(\overline{E_2}) - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16},$$

$$P(B) = P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16},$$

$$P(A \cap B) = P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3) + P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3)$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}.$$

Essendo $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ si ha che A e B non sono indipendenti.

(ii) Nel caso di estrazioni senza rimpiazzamento si ha

$$P(A) = P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1)P(E_2|E_1) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 0 = 1,$$

$$P(B) = P(\overline{\overline{E_1} \cap \overline{E_2}}) = 1 - P(\overline{E_1})P(\overline{E_2}|\overline{E_1}) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Essendo $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, A e B sono indipendenti.

Esercizio 2 (i) Distribuzioni congiunta e marginali sono date da:

$x \backslash y$	2	3	4	5	$p_X(x)$
1	1/6	1/6	0	0	2/6
2	0	0	0	1/6	1/6
3	0	0	1/6	1/6	2/6
4	0	0	0	1/6	1/6
$p_Y(y)$	1/6	1/6	1/6	3/6	1

(ii) Essendo $p(1, 2) = \frac{1}{6} \neq p_X(1)\, p_Y(2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}$ si ha che X e Y non sono indipendenti.

(iii) Risulta

$$E(X) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{3}, \qquad E(Y) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{15}{6} = 4,$$

$$E(XY) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} + \frac{15}{6} + \frac{20}{6} = \frac{31}{3}.$$

Pertanto

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{31}{3} - 4 \cdot \frac{7}{3} = 1.$$

Esercizio 3 (i) Essendo Y uniforme in (a, b), deve essere

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} = 6,$$
$$Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = 12,$$

da cui si ricava $a = 0$ e $b = 12$. Quindi

$$\begin{aligned}
&P(\{X \leq 2\} \cup \{Y \leq 2\}) = P(\{X \leq 2\}) + P(\{Y \leq 2\}) - P(\{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\}) \\
&= P\left(\frac{X-(-1)}{2} \leq \frac{2-(-1)}{2}\right) + \frac{1}{6} - P(\{X \leq 2\})\, P(\{Y \leq 2\}) \\
&= \Phi(1{,}5) + \frac{1}{6} - \Phi(1{,}5)\,\frac{1}{6} = 0{,}9332 + 0{,}1666 - 0{,}9332 \cdot 0{,}1666 = 0{,}9443.
\end{aligned}$$

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}
&P(\{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\} \,|\, \{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\}) \\
&\quad = \frac{P(\{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\} \cap \{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\})}{P(\{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\})} \\
&\quad = \frac{P(X \leq 1)\, P(Y \leq 1)}{P(X \leq 2)\, P(Y \leq 2)} \\
&\quad = \frac{\Phi(1)\frac{1}{12}}{\Phi(1{,}5)\frac{1}{6}} = \frac{0{,}8413}{0{,}9332} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}4508.
\end{aligned}$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 7/1/2010 - ore 11

Esercizio 1 Risulta

					A	B
0	0	0	1	1	x	x
0	0	1	0	1	x	
0	1	0	0	1	x	
1	0	0	0	1	x	x
0	0	1	1	0	x	
0	1	0	1	0	x	
1	0	0	1	0	x	
0	1	1	0	0	x	
1	0	1	0	0	x	
1	1	0	0	0		x

(i) Si ha che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = 1,$$

$$P(A \,|\, \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{7/10}{7/10} = 1,$$

$$P(\overline{A} \,|\, B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}.$$

Essendo $P(A \,|\, \overline{B}) = 1 \neq P(A) = \frac{9}{10}$, gli eventi A e B non sono indipendenti.

Esercizio 2 (i) Risulta

$$P(X = 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64},$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{33}{64},$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{64},$$
$$P(X = 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 9/64 & 0 \leq x < 1, \\ 42/64 & 1 \leq x < 2, \\ 61/64 & 2 \leq x < 3, \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

(iii)

$$E(X) = \frac{33}{64} + \frac{38}{64} + \frac{9}{64} = \frac{80}{64} = 1{,}25$$

$$E(X^2) = \frac{33}{64} + \frac{76}{64} + \frac{27}{64} = \frac{136}{64} = 2{,}125$$

e quindi

$$Var(X) = \frac{136}{64} - (\frac{80}{64})^2 = 0,5625.$$

Esercizio 3 (i)

$$P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = P\left(Z > \frac{1-(-2)}{3}\right)\left[1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\right]$$

$$= (1 - \Phi(1))(\mathrm{e}^{-1/2}) = (1 - 0{,}8413) \cdot 0{,}6065 = 0{,}1587 \cdot 0{,}6065 = 0{,}0962.$$

(ii) Si ha $g(p) = E[(pX + (1-p)Y)^2]$

$$= E(p^2X^2 + (1-p)^2Y^2 + 2p(1-p)XY) = p^2E(X^2) + (1-p)^2E(Y^2) + 2p(1-p)E(XY).$$

Quindi

$$\frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p} = 2pE(X^2) - 2(1-p)E(Y^2) + 2(1-2p)E(X)E(Y) = 0$$

per

$$p = p^* = \frac{E(Y^2) - E(X)E(Y)}{E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)}.$$

Essendo

$$E(Y^2) = Var(Y) + E(Y)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 4 + 4 = 8,$$

e

$$E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 9 + 4 = 13,$$

si ha che

$$p^* = \frac{8 - (-2)2}{13 + 8 - 2(-2)2} = \frac{12}{29} = 0,4137.$$

Poiché

$$\frac{\mathrm{d}^2g(p)}{\mathrm{d}p^2} = 2E(X^2) + 2E(Y^2) - 4E(X)E(Y) = 2E\{(X-Y)^2\} \geq 0,$$

si conclude che p^* è un punto di minimo.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 7/1/2010 – ore 15

Esercizio 1 (i) Posto $T_k = \{$ esce testa al k-esimo lancio$\}$, $k = 1, 2, 3, 4$, si ha che

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - \{P(\overline{T_1}\,\overline{T_2}\,T_3\,\overline{T_4}) + P(\overline{T_1}\,\overline{T_2}\,\overline{T_3}\,T_4) + P(\overline{T_1}\,\overline{T_2}\,\overline{T_3}\,\overline{T_4})\} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

Inoltre

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/16}{1/16 + 4/16} = 3/5.$$

(ii)
Essendo $P(A \,|\, B) = \frac{3}{5} \neq P(A) = \frac{1}{4}$, si ha che gli eventi A e B non sono indipendenti.

Esercizio 2 (i) Risulta

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Si ha che

$$E(X^n) = \int_0^1 3x^2 x^n \mathrm{d}x = 3\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big|_0^1 = \frac{3}{n+3}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(iii) Essendo $E(X) = 3/4$ e $E(X^2) = 3/5$, risulta

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{80}.$$

(iv) Risulta

$$\frac{3}{n+2} \cdot \frac{3}{n+4} \geq \frac{9}{(n+3)^2} \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 6n + 9 \geq n^2 + 6n + 8,$$

e l'ultima diseguaglianza vale per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3 Si ha

ω	X	Y
1 2	1	1
1 3	0	1
1 4	1	1
2 3	1	2
2 4	2	2
3 4	1	3

(i) Le distribuzioni congiunta e marginali sono:

$x\backslash y$	1	2	3	$p_x(x)$
0	1/6	0	0	1/6
1	2/6	1/6	1/6	2/3
2	0	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/3	1/6	1

(ii) Essendo

$$p(0,1) = \frac{1}{6} \neq p_X(0)\, p_Y(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2},$$

si ha che X e Y non sono indipendenti.
(iii) Risulta

$$E(X) = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = 1, \quad E(X^2) = \frac{2}{3} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}, \quad Var(X) = \frac{1}{3},$$

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3}, \quad E(Y^2) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{10}{3}, \quad Var(Y) = \frac{5}{9},$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{3} = \frac{1}{6}.$$

Pertanto

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{9}.$$

(iv)

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1/6}{\sqrt{5/9 \cdot 1/3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}387.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 27/1/2010

Esercizio 1 Definiamo i seguenti eventi: A={la sequenza è ordinata in senso crescente} e $B_k = \{$il primo numero estratto è $k\}$; risulta:
(i)

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{5^3} = \frac{10}{125} = 0{,}08,$$

(ii)

$$P(B_1 \,|\, A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{6}{10},$$

(iii)

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{0}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{3}{10},$$

(iv)

$$P(B_3 \,|\, A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{1}{10},$$

(iv)

$$\sum_{i=1}^{3} P(B_i \,|\, A) = \frac{6+3+1}{10} = 1.$$

Esercizio 2 (i) Si ha che $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = 1/x^2$ per $x \geq 1$, e $f(x) = 0$ per $x < 1$.
(ii) Risulta

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{x^{-2}}{2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

(iii)

$$P(X > s) = 1 - F(s) = 1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}, \quad s \geq 1,$$

$$P(X > t + s \,|\, X > t) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} = \frac{1/(s+t)}{1/t} = \frac{t}{s+t}, \quad s, t \geq 1,$$

$$P(X > 2t \,|\, X > t) \geq P(X > t) \iff \frac{1}{2} \geq \frac{1}{t} \iff t \geq 2.$$

Esercizio 3

ω				X	Y	ω				X	Y
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	2	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	2	1
0	0	1	1	2	2	1	0	1	1	3	2
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	2	2
0	1	0	1	2	1	1	1	0	1	3	2
0	1	1	0	2	2	1	1	1	0	3	3
0	1	1	1	3	3	1	1	1	1	4	4

(i) Quindi

$x\backslash y$	0	1	2	3	4	$p_x(x)$
0	1/16	0	0	0	0	1/16
1	0	4/16	0	0	0	4/16
2	0	3/16	3/16	0	0	6/16
3	0	0	2/16	2/16	0	4/16
4	0	0	0	0	1/16	1/16
$p_Y(y)$	1/16	7/16	5/16	2/16	1/16	1

(ii) Essendo

$$p(0,0) = \frac{1}{16} \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16},$$

si ha che X e Y non sono indipendenti.
(iii) X ha distribuzione binomiale, quindi

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \qquad Var(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$E(Y) = \frac{7+10+6+4}{16} = \frac{27}{16}, \qquad E(Y^2) = \frac{7+20+18+16}{16} = \frac{61}{16},$$

$$Var(Y) = \frac{61}{16} - \left(\frac{27}{16}\right)^2 = \frac{247}{256} = 0{,}9648,$$

$$E(XY) = \frac{4+6+12+12+18+16}{16} = \frac{68}{16} = \frac{17}{4}.$$

Pertanto

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{17}{4} - 2 \cdot \frac{27}{16}}{\sqrt{1 \cdot \frac{247}{256}}} = \frac{14}{\sqrt{247}} = 0{,}8908.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 10/2/2010

Esercizio 1 Definiamo i seguenti eventi: $E_k = \{$la k-esima biglia estratta dall'urna A è nera$\}$ $(k = 1, 2)$, $G = \{$la biglia estratta dall'urna B è nera$\}$, $F = \{$almeno una delle 3 biglie estratte è bianca$\}$, $H = \{$la biglia estratta dall'urna B è di colore diverso dalla seconda biglia estratta dall'urna A$\}$; risulta:
(i)
$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - P(E_1)P(E_2 \,|\, E_1)P(G) = 1 - \frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{5}{10} = \frac{5}{6},$$
(ii)
$$P(\overline{E_2}) = P(\overline{E_2} \,|\, E_1)P(E_1) + P(\overline{E_2} \,|\, \overline{E_1})P(\overline{E_1}) = \frac{4}{9}\frac{6}{10} + \frac{3}{9}\frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$
(iii)
$$P(H) = P(H \,|\, \overline{E_2})P(\overline{E_2}) + P(H \,|\, E_2)P(E_2) = \frac{5}{10}\frac{2}{5} + \frac{5}{10}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

(i)

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{1}{4}, \\ P(X = 2) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \\ P(X = 3) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}, \\ P(X = 0) &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}. \end{aligned}$$

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 27/64 & 0 \le x < 1, \\ 43/64 & 1 \le x < 2, \\ 55/64 & 2 \le x < 3, \\ 1 & x \ge 3. \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{16}{64} + 2\,\frac{12}{64} + 3\,\frac{9}{64} = \frac{67}{64}, \\ E(X^2) &= \frac{16}{64} + 4\,\frac{12}{64} + 9\,\frac{9}{64} = \frac{145}{64}, \end{aligned}$$

e quindi
$$Var(X) = \frac{145}{64} - \left(\frac{67}{64}\right)^2 = 1{,}169.$$

Esercizio 3 Essendo combinazione lineare di variabili aleatorie normali, la variabile aleatoria $\overline{X}$ ha distribuzione normale di valore medio e varianza

$$E(\overline{X}) = \frac{2n}{n} = 2, \qquad Var(\overline{X}) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Per $n = 4$ si ha:
(i)

$$P(1 < \overline{X} < 3) = P\left(\frac{\overline{X} - 2}{1/2} < \frac{3 - 2}{1/2}\right) - P\left(\frac{\overline{X} - 2}{1/2} < \frac{1 - 2}{1/2}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -2)$$
$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(-2)] = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544;$$

(ii) essendo

$$P(\overline{X} > 1) = 1 - P(\overline{X} \leq 1) = 1 - P\left(\frac{\overline{X} - 2}{1/2} \leq \frac{1 - 2}{1/2}\right) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0{,}9772$$

si ottiene

$$P(1 < \overline{X} < 3 \,|\, \overline{X} > 1) = \frac{P(1 < \overline{X} < 3)}{P(\overline{X} > 1)} = \frac{0{,}9544}{0{,}9772} = 0{,}9776.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 24/2/2010

Esercizio 1 Le sequenze del tipo $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ sono 3^n, in quanto ciascun c_i può assumere valore $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$.
(i) Risulta, per $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$P(A_k) = \frac{2^{n-k}\binom{n}{k}}{3^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

(ii) Si ha, per $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$P(A_k \cap B_{n-k}) = \frac{\binom{n}{k}}{3^n}.$$

(iii) Ricordando la formula del binomio di Newton segue:

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k \cap B_{n-k}) = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{3^n}\,2^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Esercizio 2 (i) Risulta:

	X	Y
1	2	4
2	1	5
3	1	5
4	1	3
5	2	3

$x\backslash y$	3	4	5	$p_X(x)$
1	1/5	0	2/5	3/5
2	1/5	1/5	0	2/5
$p_Y(y)$	2/5	1/5	2/5	1

(ii) Si ha $E(X) = 3/5+4/5 = 7/5$, $E(Y) = 6/5+4/5+10/5 = 4$, $E(X^2) = 3/5+8/5 = 11/5$, $E(Y^2) = 18/5 + 16/5 + 50/5 = 84/5$, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6/25$, $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 4/5$, $E(X \cdot Y) = 3/5 + 10/5 + 6/5 + 8/5 = 27/5$. Pertanto il coefficiente di correlazione di (X, Y) è dato da:

$$\rho(X,Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = -0{,}4564.$$

(iii) Risulta poi:

$$P(X+Y \le 4 \,|\, X+Y \le 5) = \frac{P(X+Y \le 4)}{P(X+Y \le 5)} = \frac{p(1,3)}{p(1,3)+p(1,4)+p(2,3)} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 (i) Poiché X e Y sono variabili indipendenti, risulta

$$\begin{aligned} P(\{X>0\}\cup\{Y>1/2\}) &= P(X>0)+P(Y>1/2)-P(X>0,Y>1/2) \\ &= P(X>0)+P(Y>1/2)-P(X>0)P(Y>1/2) \\ &= 0{,}6915+0{,}75-0{,}6915\cdot 0{,}75 = 0{,}9229 \end{aligned}$$

essendo

$$P(X>0)=P\left(\frac{X-1}{2}>-\frac{1}{2}\right)=1-\Phi(-0{,}5)=\Phi(0{,}5)=0{,}6915$$

e

$$P(Y>1/2)=\int_{1/2}^{1} 2y\,\mathrm{d}y=[y^2]_{1/2}^{1}=1-(1/2)^2=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

(ii) Si ha infine

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+\int_0^1 y\cdot 2y\,\mathrm{d}y=1+\frac{2}{3}[y^3]_0^1=\frac{5}{3}$$

e

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y)=4+E(Y^2)-[E(Y)]^2=4+\int_0^1 y^2\cdot 2y\,\mathrm{d}y-\frac{4}{9} \\ &= 4+\frac{2}{4}[y^4]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{73}{18}=4{,}0556. \end{aligned}$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 13/4/2010

Esercizio 1 Posto $A = \{$almeno una delle tre biglie estratte è blu$\}$, $B = \{$le prime due biglie estratte sono di colore diverso$\}$, risulta:
(i)

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24} = 0{,}708;$$

(ii)

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left\{ \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \right\} = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45};$$

(iii)

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{17}{24}} = \frac{66}{85},$$

essendo

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{7}{24} - \frac{14}{45} + \frac{11}{72} = \frac{11}{20}.$$

Esercizio 2 (i) Si ha che $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{x^4}$ per $x \geq 1$ e $f(x) = 0$ per $x < 1$.
(ii) Risulta

$$E\,(X) = \int_1^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3} \mathrm{d}x = -\frac{3}{2\,x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{3}{2},$$

$$E\left(X^2\right) = \int_1^{+\infty} x^2\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{3}{x}\Big|_1^{+\infty} = 3,$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

(iii)

$$P(X > 3 \,|\, X > 2) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - F_X(3)}{1 - F_X(2)} = \frac{1/27}{1/8} = \frac{8}{27} = 0{,}296.$$

Esercizio 3 Si ha

ω	X	Y
1 2	2	1
1 3	4	1
1 4	1	1
1 5	3	1
1 6	3	1
2 3	2	2
2 4	1	2
2 5	1	2
2 6	1	2
3 4	3	3
3 5	3	3
3 6	1	3
4 5	2	4
4 6	2	4
5 6	2	5

(i) Le distribuzioni congiunta e marginali sono:

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	$p_x(x)$
1	1/15	3/15	1/15	0	0	5/15
2	1/15	1/15	0	2/15	1/15	5/15
3	2/15	0	2/15	0	0	4/15
4	1/15	0	0	0	0	1/15
$p_Y(y)$	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15	1

(ii) Si ha

$$E(X \cdot Y) = \frac{1+6+3+2+4+16+10+6+18+4}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3},$$

e

$$E(X) = \frac{5+10+12+4}{15} = \frac{31}{15}, \qquad E(Y) = \frac{5+8+9+8+5}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}.$$

Pertanto

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = -\frac{7}{45}.$$

(iii)

$$E(X+Y) = \frac{31}{15} + \frac{35}{15} = \frac{66}{15},$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) = \frac{194}{225} + \frac{14}{9} - \frac{14}{45} = \frac{158}{75} = 2{,}1067,$$

essendo

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5+20+36+16}{15} - \left(\frac{31}{15}\right)^2 = \frac{194}{225} = 0{,}86$$

e

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{5+16+27+32+25}{15} - \left(\frac{35}{15}\right)^2 = \frac{14}{9} = 1{,}56.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 17/07/2010 – ore 9

Esercizio 1 Posto $A = \{$nei tre lanci si ottiene una testa e due croci$\}$, risulta:

(i)

$$P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{553}{1728} = 0{,}32,$$

essendo

$$P(A \,|\, m_1) = \binom{3}{1} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(A \,|\, m_2) = \binom{3}{1} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$P(A \,|\, m_3) = \binom{3}{1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

e

$$P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = 1/3.$$

(ii)

$$P(m_1 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, m_1)\, P(m_1)}{P(A)} = \frac{4/27}{553/1728} = 0{,}463,$$

$$P(m_2 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, m_2)\, P(m_2)}{P(A)} = \frac{3/64}{553/1728} = 0{,}146,$$

$$P(m_3 \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, m_3)\, P(m_3)}{P(A)} = \frac{1/8}{553/1728} = 0{,}391.$$

Esercizio 2 (i) Risulta:

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	16/36	5/36	21/36
1	14/36	1/36	15/36
$p_Y(y)$	30/36	6/36	1

(ii) Si ha

$$E(X) = 5/12, \qquad E(Y) = 1/6,$$

$$Var(X) = (1 - 5/12)(5/12), \qquad Var(Y) = (1 - 1/6)(1/6).$$

(iii) Essendo $E(X \cdot Y) = 1/36$, il coefficiente di correlazione di (X, Y) è dato da:

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = -\frac{3}{5\sqrt{7}} = -0{,}227.$$

Esercizio 3 (i) Poiché X e Y sono variabili indipendenti, risulta

$$P(X \le -1,\, Y \le 2) = P(X \le -1) \cdot P(Y \le 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}865 = 0{,}432$$

essendo

$$P(X \le -1) = P\left(\frac{X-(-1)}{2} \le 0\right) = \Phi(0) = 0{,}5$$

e

$$P(Y \le 2) = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0{,}865.$$

(ii) Si ha

$$E(T) = p\,E(X \cdot Y) + q = p\,E(X)\,E(Y) + q = -p + q,$$

e

$$Var(T) = p^2\,Var(X \cdot Y) = 9\,p^2$$

essendo

$$Var(X \cdot Y) = E(X^2\,Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = E(X^2)E(Y^2) - (E(X)E(Y))^2 = 9.$$

Infine

$$\begin{aligned} &Cov(T, X) = p\,Cov(X\,Y, X) = p \cdot \left\{E(X^2\,Y) - E(Y)\,E(X)^2\right\} \\ &= p \cdot \left\{E(X^2)\,E(Y) - E(Y)\,E(X)^2\right\} = p\,E(Y)\,Var(X) = 4p. \end{aligned}$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 21/07/2010 – ore 9

Esercizio 1 (i) Risulta $P(G) = P(ABDG) + P(ACEG) = [P(AB)\,P(BD)\,P(DG)] + [P(AC)\,P(CE)\,P(EG)] = [(1/2)(1)(1)] + [(1/2)(1/2)(1/2)] = 1/2 + 1/8 = 5/8$.
(ii) Risulta $P(H) = P(ACEH)+P(ACFH) = [P(AC)\,P(CE)\,P(EH)]+[P(AC)\,P(CF)\,P(FH)] = [(1/2)(1/2)(1/2)] + [(1/2)(1/2)(1)] = 1/8 + 1/4 = 3/8$.
(iii) Si ha

$$P(E|G) = P(ACEG|ACEG \cup ABDG) = \frac{P(ACEG)}{P(ACEG) + P(ABDG)} = \frac{1/8}{1/8 + 1/2} = \frac{1}{5}.$$

(iv) Infine,

$$P(E|H) = P(ACEH|ACEH \cup ACFH) = \frac{P(ACEH)}{P(ACEH) + P(ACFH)} = \frac{1/8}{1/8 + 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 (i) Risulta: $F(x) = 0$ per $x < -1$; $F(x) = \int_{-1}^{x} p\,dy = p(x+1)$ per $-1 \le x < 0$; $F(x) = p + \int_0^x (1-p)\,dy = p + (1-p)x$ per $0 \le x < 1$; e infine $F(x) = 1$ per $x \ge 1$.
(ii) Si ha: $E(X) = \int_{-1}^{0} p\,x\,dx + \int_0^1 (1-p)\,x\,dx = -p/2 + (1-p)/2 = (1-2p)/2 = \frac{1}{2} - p$.
$E(X^2) = \int_{-1}^{0} p\,x^2\,dx + \int_0^1 (1-p)\,x^2\,dx = p/3 + (1-p)/3 = 1/3$.
(iii) Pertanto: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/3 - (1-2p)^2/4 = 1/3 - (1/2-p)^2$.
Si ha: $\frac{d}{dp}Var(X) = \frac{d}{dp}[1/3 - (1/2-p)^2] = 1 - 2p = 0$ per $p = 1/2$.

Esercizio 3 (i) Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se la i-esima moneta da 2 euro mostra testa ($i = 1, 2, \ldots, n$), e sia Y_j la variabile di Bernoulli che vale 1 se la j-esima moneta da 1 euro mostra testa ($j = 1, 2, \ldots, n$). Si ha: $V = 2(X_1+X_2+\ldots+X_n)-(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)$.
(ii) Poiché le variabili X_i e Y_j sono i.i.d., di Bernoulli di parametro 1/2, e quindi di media 1/2 e varianza 1/4, risulta:
$E(V) = 2n(1/2) - n(1/2) = n/2$,
$Var(V) = 4n(1/4) + n(1/4) = n\,5/4$,
in virtù dell'indipendenza dei lanci.
(iii) Dalla disuguaglianza di Chebyshev segue:

$$P[|V - E(V)| \le E(V)] = P(0 \le V \le n) \ge 1 - \frac{Var(V)}{[E(V)]^2} = 1 - n\,\frac{5}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^2 = 1 - \frac{5}{n},$$

cosicché la limitazione risulta essere significativa per $n \ge 5$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 10/9/2010

Esercizio 1 (i) Risulta: $P(B_3) = (1/3)(1/2) = 1/6$, $P(B_4) = (1/3)(1/2) = 1/6$, e inoltre $P(B_5) = (1/3)(1) + (1/3)(1/2) + (1/3)(1/2) = 2/3$. Quindi $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$.
(ii) Sia $A_r = \{\text{il messaggio è passato per il nodo } r\}$ (con $r = 2, 3, 4$); allora:
$P(A_2|B_5) = P(B_5|A_2)\, P(A_2)/P(B_5) = (1)(1/3)/(2/3) = 1/2$,
$P(A_3|B_5) = P(B_5|A_3)\, P(A_3)/P(B_5) = (1/2)(1/3)/(2/3) = 1/4$,
$P(A_4|B_5) = P(B_5|A_4)\, P(A_4)/P(B_5) = (1/2)(1/3)/(2/3) = 1/4$.

Esercizio 2 Essendo

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-2p & \text{per } x = -1, \\ p & \text{per } x = 0 \text{ e } x = 1, \end{cases} \qquad (0 \le p \le 1/2).$$

(i) la funzione di distribuzione è

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1, \\ 1-2p & \text{per } -1 \le x < 0, \\ 1-p & \text{per } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{per } x \ge 1, \end{cases}$$

(ii) il valore medio è $E(X) = \sum_x x\, p(x) = 3p - 1$;
(iii) $E(X^2) = \sum_x x^2\, p(x) = 1 - p$, e pertanto la varianza è $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - p - (3p-1)^2 = 5p - 9p^2$, quindi $(d/dp)Var(X) = 5 - 18p$ e il massimo della varianza si ha per $p = 5/18$.

Esercizio 3 Poiché X ha distribuzione binomiale di parametri n e p, posto $Y = n(1-p)+X$,
(i) valore medio e varianza di Y sono:
$E(Y) = E[n(1-p) + X] = n(1-p) + E[X] = n(1-p) + np = n$,
$Var(Y) = Var[n(1-p) + X] = Var[X] = np(1-p)$.
(ii) Per la disuguaglianza di Chebyshev si ha

$$P(n/2 \le Y \le 3n/2) = P(|Y-n| \le n/2) = P(|Y-E(Y)| \le n/2) \ge 1 - \frac{Var(Y)}{(n/2)^2} = 1 - \frac{4p(1-p)}{n}.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 17/12/2010

Esercizio 1 Risulta

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}, \qquad P(C) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}, \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8}, \qquad P(B \cap C) = \frac{3}{8}, \qquad P(A \cap B \cap C) = 0.$$

Pertanto si ha:
(i) $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, quindi A e B non sono indipendenti.
(ii) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, quindi A e C sono indipendenti.
(iii) $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$, quindi B e C non sono indipendenti.
(iv) $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$, quindi A, B e C non sono indipendenti.

Esercizio 2 La variabile aleatoria X ha distribuzione geometrica di parametro

$$p = P(\text{si realizza una coppia di numeri pari in un lancio generico}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(i) Quindi

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

(ii)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(iii)

$$E(X) = \frac{1}{p} = 4.$$

Esercizio 3 (i) Dovendo essere

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + b\,x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{b}{3},$$

si ricava $b = 2$.
(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{3} + 2\,t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{3} + \frac{2\,x^3}{3} & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

(iii)

$$P\Big(X > \frac{1}{2} \,|\, X > \frac{1}{4}\Big) = \frac{1 - F(1/2)}{1 - F(1/4)} = \frac{3/4}{29/32} = \frac{24}{29} = 0{,}8276.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 20/12/2010

Esercizio 1 (i) Posto $B_i = \{$l'i-esima biglia estratta è blu$\}$, $(i = 1, 2)$, e $A_k = \{$è scelta l'urna k-esima$\}$, $(k = 1, 2, 3)$, si ha

$$P(B_1) = \sum_{k=1}^{3} P(B_1 \mid A_k) P(A_k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Essendo

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{3} P(B_1 \cap B_2 \mid A_k) P(A_k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\binom{k}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+3}{6 \cdot 3} = \frac{2}{9},$$

si ha

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{2/9}{1/2} = \frac{4}{9} = 0{,}4444.$$

Esercizio 2 (i) Risulta

$$P(X = 1) = \binom{6}{3} \frac{1}{2^6} = \frac{5}{16}, \qquad P(X = 2) = \frac{1}{2^6} \sum_{j=4}^{6} \binom{6}{j} = \frac{11}{32} = P(X = 0).$$

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 11/32 & 0 \le x < 1, \\ 11/32 + 10/32 = 21/32 & 1 \le x < 2, \\ 1 & x \ge 2. \end{cases}$$

(iii) Si ha

$$E(X) = \frac{5}{16} + 2 \cdot \frac{11}{32} = 1, \qquad E(X^2) = \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{11}{32} = \frac{27}{16},$$

e quindi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{27}{16} - 1 = \frac{11}{16}.$$

Esercizio 3 (i) Essendo $E(X) = 6$, si deduce che $\lambda = 1/6$ e pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \int_0^x \frac{1}{6} \mathrm{e}^{-t/6} \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x/6} & x \ge 0. \end{cases}$$

(ii)

$$P(X > 12) = 1 - F(12) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-12/6}) = \mathrm{e}^{-2} = 0{,}1353.$$

(iii) Per la proprietà di assenza di memoria, si ha

$$P(X > 12 + 1 \mid X > 1) = P(X > 12) = \mathrm{e}^{-2} = 0{,}1353.$$

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
Fisciano, 21/12/2010

Esercizio 1 (i) Posto $A_k = \{$nei 2 sacchetti scelti da Alice vi sono k premi$\}$, si ha:

$$P(A_k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{8}{2-k}}{\binom{10}{2}} = \begin{cases} 28/45 & \text{se } k=0, \\ 16/45 & \text{se } k=1, \\ 1/45 & \text{se } k=2. \end{cases}$$

(ii) Sia $B = \{$c'è un premio nel sacchetto scelto da Bob$\}$; allora

$$P(B) = \sum_{k=0}^{2} P(B\,|\,A_k)\,P(A_k) = \sum_{k=0}^{2} \frac{2-k}{8}\cdot\frac{\binom{2}{k}\binom{8}{2-k}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{8}\cdot\frac{28}{45}+\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{45} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

(iii) Per la formula di Bayes si ha:

$$P(A_0\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,A_0)\,P(A_0)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}\cdot\frac{28}{45}}{\frac{1}{5}} = \frac{7}{9} = 0{,}7777.$$

Esercizio 2 (i) Risulta

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4};\quad P(X=1) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8};\quad P(X=-1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.$$

(ii) Si ha: $F(x)=0$ per $x<-1$; $F(x)=3/8$ per $-1\le x<0$; $F(x)=5/8$ per $0\le x<1$; $F(x)=1$ per $x\ge 1$.
(iii)

$$E(X^n) = \frac{3}{8}+(-1)^n\frac{3}{8} = \begin{cases} 0 & \text{per n dispari,} \\ 3/4 & \text{per n pari.} \end{cases}$$

(iv)

$$E(|X|) = \frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 (i) Dovendo essere $(-1+b)/2 = 0 = E(X)$, si ricava $b=1$.
(ii) Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<-1, \\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{x+1}{2} & -1\le x<1, \\ 1 & x\ge 1. \end{cases}$$

(iii) Si ricava:

$$P(|X|\le 1/2\,|\,X>-1/2) = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-F\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$